

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

**ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ»**

**Дніпро
2026**

УДК 517.9(076)
П69

*Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 5 від 23.12.2025 р.)*

Рецензенти:

Пипка О. О., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

Величко Т. В., кандидат фізико-математичних наук, вчитель математики комунального закладу освіти “Науковий фізико-математичний ліцей” Дніпропетровської обласної ради

П69 Практикум з вищої математики за темою «Диференціальні та інтегральні рівняння» / уклад.: Р.О. Біліченко, М.Б. Вакарчук. Дніпро: Ліра, 2026. 56 с.

Наведено основні методи розв’язування диференціальних та інтегральних рівнянь та набір практичних завдань для самостійного виконання. Для здобувачів освіти, що вивчають курси «Вища математика», «Диференціальні рівняння», «Диференціальні та інтегральні рівняння».

**Практикум з вищої математики за темою
«Диференціальні та інтегральні рівняння»**

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Р. О. Біліченко
канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук

© Біліченко Р. О., Вакарчук М. Б., 2026

Зміст

| | |
|---|----|
| Передмова | 4 |
| 1. Диференціальні та інтегральні рівняння | 4 |
| 1.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь | 4 |
| 1.2. Диференціальні рівняння першого порядку | 6 |
| 1.3. Рівняння з відокремлюваними змінними | 6 |
| 1.4. Однорідні диференціальні рівняння | 8 |
| 1.5. Лінійні рівняння | 9 |
| 1.6. Рівняння Бернуллі | 11 |
| 1.7. Рівняння у повних диференціалах | 12 |
| 1.8. Інтегрувальний множник | 14 |
| 1.9. Рівняння Лагранжа і Клеро | 16 |
| 1.10. Диференціальні рівняння вищих порядків | 18 |
| 1.11. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку | 21 |
| 1.12. Лінійні однорідні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами | 23 |
| 1.13. Лінійні неоднорідні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами | 25 |
| 1.14. Інтегральні рівняння | 27 |
| 1.15. Метод послідовних наближень | 28 |
| 1.16. Метод зведення до диференціального рівняння | 30 |
| 2. Практичні завдання | 32 |
| Список літератури | 47 |
| Додаток. Основні формули та означення | 48 |

Передмова

Диференціальні та інтегральні рівняння є важливими математичними об'єктами, які застосовуються у багатьох прикладних задачах природознавства і техніки. Перша частина посібника містить основні теоретичні відомості з теорії та методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, а також зразки розв'язання типових прикладів. Це може бути використано для узагальнення матеріалу, що викладається на лекційних заняттях, а також при виконанні індивідуальних завдань.

Друга частина практикуму подана у вигляді варіантів завдань для індивідуального виконання.

У додатку наведено опорний конспект основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню у студентів практичних навичок розв'язування задач. Згідно з цією метою матеріал систематизовано і поділено на частини таким чином, що можна легко знайти необхідну формулу або означення. Таке викладення сприяє засвоєнню лекційного матеріалу, але ніяк не замінює його.

1. Диференціальні та інтегральні рівняння

1.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Означення. Рівняння, в якому невідома функція стоїть під знаком похідної або диференціала, називається диференціальним. Якщо невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним, якщо двох та більшого числа змінних, – рівнянням в частинних похідних.

Приклад. Диференціальними є рівняння:

$$x(y')^2 - 2y \ln y' - 1 = 0,$$

$$xy''' + y^{IV} = x^3 y^2,$$

$$dx + xydy = 0.$$

Означення. Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, що входить до цього рівняння.

Приклад. Рівняння $x(y')^2 - 2y \ln y' - 1 = 0$ є диференціальним рівнянням першого порядку. Рівняння $xy''' + y^{IV} = x^3 y^2$ – рівняння четвертого порядку.

Загальний вигляд диференціального рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Означення. Функція, яка має неперервні похідні відповідного порядку і перетворює диференціальне рівняння на тотожність, називається розв'язком диференціального рівняння.

Приклад. Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' + y = \cos x$.

Означення. Функція $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ називається загальним розв'язком диференціального рівняння (1), якщо вона є розв'язком цього рівняння при довільних значеннях сталих C_1, \dots, C_n .

Приклад. Функція $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$.

Означення. Якщо розв'язок диференціального рівняння отримано в неявному вигляді, то він називається інтегралом рівняння.

Приклад. Функція $\arcsin x + \sqrt{3 + y^2} = 0$ є інтегралом рівняння $\sqrt{3 + y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0$.

Означення. Якщо надати довільним сталим загального розв'язку конкретні числові значення, то відповідний розв'язок називається частинним.

Приклад. Частинними розв'язками рівняння $y'' + y = 0$ є функції $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$.

Означення. Особливим розв'язком диференціального рівняння називається його розв'язок, який не може бути отриманий із загального розв'язку ні при якому значенні довільних сталих.

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $F(x, y, y') = 0$. Якщо це рівняння розв'язати відносно y' , то його можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

У такому випадку говорять, що диференціальне рівняння розв'язане відносно похідної.

Теорема. Якщо в рівнянні (2) функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y неперервні в деякій області D на площині Oxy , що містить деяку точку (x_0, y_0) , то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, що задовольняє умові $y(x_0) = y_0$.

Означення. Умова $y(x_0) = y_0$ називається початковою умовою. Задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, називають задачу пошуку розв'язку рівняння, який задовольняє початкову умову. Задачу Коші записують у формі:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Означення. Загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку – це функція вигляду $\Phi(x, y, C) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок рівняння. Якщо надати сталій C конкретного значення, то отримаємо частинний інтеграл рівняння.

Приклад. Для рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ загальним розв'язком є множина функцій $y = \frac{C}{x}$. Частинним розв'язком цього рівняння, що задовольняє початковій умові $y(2) = 1$, є функція $y = \frac{2}{x}$.

1.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння типу

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (3)$$

називають рівняння з відокремленими змінними. Загальний інтеграл рівняння (3) має вигляд

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Приклад. Загальним інтегралом рівняння $x dx + y dy = 0$ є

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Зазначимо, що завжди $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 0$.

Якщо позначити $C^2 = 2C_1$, то остаточно одержимо $x^2 + y^2 = C^2$.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Воно може бути зведене до рівняння з відокремленими змінними шляхом ділення обох його частин на вираз $N_1(y)M_2(x)$ за умови, що $N_1(y)$ та $M_2(x)$ не перетворюються на нуль.

Приклад. Розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$x dy + y dx = 0.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

замінімо сталу C на іншу сталу $\ln|C|$. Тоді

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Звідси отримаємо загальний розв'язок рівняння: $y = \frac{C}{x}$.

1.4. Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функція $f(x, y)$ називається однорідною k -го порядку відносно x та y , якщо для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Приклади. Функція $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ є однорідною функцією першого порядку. Дійсно,

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = \sqrt[3]{t^3(x^3 + y^3)} = t \sqrt[3]{x^3 + y^3} = tf(x, y).$$

Функція $f(x, y) = xy - y^2$ – однорідна функція другого порядку.

Функція $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ є однорідною функцією нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку відносно x та y .

Заміною $z = \frac{y}{x}$ однорідне диференціальне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

У правій частині рівняння стоїть однорідна функція нульового порядку, отже це однорідне диференціальне рівняння. Його можна переписати у вигляді:

$$y' = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну $\frac{y}{x} = z$. Тоді $y = zx$, $y' = z + xz'$,

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} - z,$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1 - 2z^2}{z}.$$

Відокремлюючи змінні, будемо мати:

$$\frac{zdz}{1 - 2z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, знайдемо:

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2z^2| = \ln|x| + \ln|C|$$

або

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2z^2}} = xC.$$

Підставляючи $z = \frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{2y^2}{x^2}}} = xC.$$

Зауваження. Рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

буде однорідним у тому і тільки в тому випадку, коли $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними функціями одного й того ж порядку. Це випливає з того, що відношення двох однорідних функцій одного й того ж порядку є однорідною функцією нульового порядку.

Приклад. Рівняння

$$(2x + 3y)dx + (x - 2y)dy = 0,$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

є однорідними. Заміною $y = zx$, $dy = xdz + zdx$ вони зводяться до рівняння з відокремлюваними змінними.

1.5. Лінійні рівняння

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4)$$

де $p(x), q(x)$ задані неперервні функції. Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння називається лінійним неоднорідним, у протилежному випадку – однорідним.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Цей метод базується на пошуку розв'язку лінійного однорідного рівняння (коли $q(x) \equiv 0$).

Відповідне лінійне однорідне рівняння $y' + p(x)y = 0$ інтегрується відокремленням змінних. Його загальний розв'язок $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Тоді розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має той самий вигляд, що й однорідного $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де замість сталої C записують функцію $C(x)$, яку знаходять шляхом підстановки розв'язку до лінійного неоднорідного рівняння.

Приклад. Розв'яжемо методом Лагранжа рівняння

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx, \quad \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln[C], \quad y = C(x+1)^2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x) \cdot (x+1)^2.$$

Підставляємо y та $y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$ у вихідне рівняння:

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^3,$$

звідки $C'(x) = x+1$ і $C(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C_0$. Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C_0(x+1)^2.$$

Метод підстановки (метод Бернуллі). Загальний розв'язок рівняння (4) будемо шукати у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$, де $u(x)$ та $v(x)$ невідомі функції, одна з яких, наприклад, $v(x)$ може бути обрана довільно. Оскільки $y' = u'v + uv'$, рівняння (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u'v + uv' + p(x)uv &= q(x), \\ u'v + u(v' + p(x)v) &= q(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках у лівій частині (5) перетворювався на нуль. Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x), \end{cases}$$

з якої знаходимо функції $u(x)$ та $v(x)$.

Приклад. Розв'яжемо методом Бернуллі рівняння

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Поклавши $y = uv$, отримаємо

$$\begin{aligned} u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv &= (x+1)^3, \\ u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) &= (x+1)^3. \end{aligned}$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} v' - \frac{2}{x+1}v = 0, \\ u'v = (x+1)^3. \end{cases}$$

Для визначення функції v маємо перше рівняння

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0.$$

Розв'язавши його, отримаємо $v = (x+1)^2$. Підставляючи знайдену функцію v у друге рівняння системи, маємо рівняння для визначення функції u :

$$(x+1)^2 u' = (x+1)^3.$$

Звідси $u = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$. Остаточним загальним розв'язком рівняння буде

$$y = uv = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C_0(x+1)^2.$$

1.6. Рівняння Бернуллі

Означення. Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1)$$

називається рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння наступним перетворенням. Розділимо всі члени рівняння на y^n :

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x). \quad (6)$$

Далі робимо заміну $z = y^{-n+1}$. Тоді $z' = (-n + 1)y^{-n}y'$. Підставляючи ці вирази в рівняння (6), отримаємо лінійне рівняння:

$$z' + (-n + 1)p(x)z = (-n + 1)q(x).$$

Знаходячи його загальний розв'язок і підставивши замість z вираз y^{-n+1} , отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

Приклад. Розв'яжемо рівняння Бернуллі

$$y' + xy = x^3y^3.$$

Розділивши всі члени рівняння на y^3 , одержимо:

$$y^{-3} + xy^{-2} = x^3.$$

Введемо нову функцію $z = y^{-2}$, тоді $z' = -2y^{-3}y'$. Підставляючи ці значення в задане рівняння, отримаємо лінійне:

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

Розв'язавши його одним з наведених вище методів, отримаємо

$$z = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

або

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}.$$

Зауваження. Рівняння Бернуллі також можна розв'язувати методом підстановки, від початку ввівши заміну $y(x) = u(x)v(x)$.

1.7. Рівняння у повних диференціалах

Означення. Рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – неперервні диференційовні функції, для яких виконується співвідношення

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (8)$$

причому $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні в деякій області.

При виконанні умови (8) ліва частина рівняння (7) є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто рівняння (7) має вигляд

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

і, отже, його загальний інтеграл має вигляд $u(x, y) = C$.

Для знаходження $u(x, y)$ маємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \end{cases} \quad (9)$$

$$(10)$$

Інтегруємо за x рівняння (9):

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y). \quad (11)$$

Підставляємо (11) у формулу (10). Для $\varphi(y)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними. Знайдене $\varphi(y)$ підставляємо у формулу (9).

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

Перевіримо, чи є воно рівнянням у повних диференціалах:

$$M(x, y) = \frac{2x}{y^3}, \quad N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Отже, при $y \neq 0$ умова (8) виконується, і ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої невідомої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію.

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3},$$

то

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – не визначена поки функція від y . Диференціюючи останнє співвідношення по y і враховуючи, що

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

знаходимо:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}.$$

Отже,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2},$$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

1.8. Інтегровальний множник

Означення. Якщо диференціальне рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (12)$$

не є рівнянням у повних диференціалах, але вдається підібрати таку функцію $\mu(x, y)$, після множення на яку всіх членів рівняння ліва частина рівняння стає повним диференціалом, то таку функцію називають інтегровальним множником рівняння (12). При цьому загальний розв'язок отриманого таким чином рівняння співпадає із загальним розв'язком вихідного.

Твердження. Для того, щоб функція $\mu(x, y)$ була інтегровальним множником рівняння (12), необхідною і достатньою умовою є виконання співвідношення

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Інтегровальний множник можна відшукати лише у деяких випадках:

1) інтегровальний множник залежить лише від x : $\mu = \mu(x)$. Тоді його знаходимо зі співвідношення

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx = \varphi(x) dx,$$

де функція φ залежить лише від x ;

2) інтегровальний множник залежить лише від y : $\mu = \mu(y)$. Тоді його знаходимо зі співвідношення

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy = \psi(y) dy,$$

де функція ψ залежить лише від y ;

3) якщо $\mu = \mu(\omega)$, де ω – задана функція від x і y . Інтегровальний множник знаходимо зі співвідношення

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = f(\omega) d\omega.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0.$$

Тут $M = y + xy^2$, $N = -x$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

і ліва частина рівняння не є повним диференціалом.

Зауважимо, що

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy = -\frac{2}{y} dy.$$

Таким чином, рівняння допускає наявність інтегрувального множника, що залежить лише від y . Знаходимо його:

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y} dy,$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}.$$

Після множення всіх членів заданого рівняння на μ одержимо рівняння в повних диференціалах

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0,$$

яке розв'язується наведеним в параграфі 1.7 способом.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{x^2 - y} dx - dy = 0,$$

якщо відомо, що інтегрувальний множник для нього має вигляд $\mu = \mu(x^2 - y)$.

Поклавши $\omega = x^2 - y$, матимемо:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}}{-2x + \sqrt{x^2 - y} + 2x} = -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega} = f(\omega).$$

Тому

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2\omega} d\omega, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Домножуючи обидві частини вихідного рівняння на знайдений інтегрувальний множник, одержимо рівняння в повних диференціалах:

$$\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y}}\right) dx - \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}} dy = 0,$$

яке розв'язується наведеним вище способом.

1.9. Рівняння Лагранжа і Клеро

Означення. Диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язуваним відносно похідної, називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0. \quad (13)$$

Загальний інтеграл рівняння (13) має вигляд $\Phi(x, y, C) = 0$. Для рівняння (13) може існувати особливий розв'язок, який можна одержати шляхом виключення сталої C із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Рівняння (14) часто може бути розв'язане відносно x або відносно y .

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (15)$$

називається рівнянням Лагранжа.

За допомогою введення параметра $y' = p$ рівняння (15) зводиться до лінійного рівняння відносно x :

$$\begin{aligned} y &= x\varphi(p) + \psi(p), \\ p dx &= \varphi(p) dx + \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) dp, \\ \frac{dx}{dp} &= \frac{x \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial p}}{p - \varphi(p)}. \end{aligned}$$

При розв'язанні може бути втрачений розв'язок, що знаходиться зі співвідношення $p - \varphi(p) = 0$, і особливий розв'язок, що визначається із системи вигляду (14).

Означення. Якщо в рівнянні (15) $\varphi(y') = y'$, то таке рівняння називається рівнянням Клеро:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння Лагранжа

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'}.$$

Покладемо $y' = p$, тоді $y = 2xp + \frac{1}{p}$.

Диференціюючи і замінюючи dy на $p dx$, отримаємо:

$$pdx = 2pdx + 2xdp - \frac{dp}{p^2},$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2p}{x} + \frac{1}{p^3}.$$

Розв'язавши одержане лінійне рівняння, будемо мати

$$x = \frac{1}{p^2} (\ln p + C).$$

Загальний розв'язок рівняння можна записати в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} (\ln p + C), \\ y = 2px + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Для знаходження особливого розв'язку складаємо систему

$$\begin{cases} y - 2px - \frac{1}{p} = 0, \\ 2x - \frac{1}{p^2} = 0. \end{cases}$$

Звідси $x = \frac{1}{2p^2}$, $y = 2p$ і тому $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

Але при підстановці у початкове рівняння переконуємось, що така функція не є розв'язком. Отже, особливих розв'язків немає.

1.10. Диференціальні рівняння вищих порядків

Нагадаємо, за формулою (1) диференціальним рівнянням n -го порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

або, якщо його можна розв'язати відносно n -ї похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (16)$$

Теорема. Якщо в рівнянні (16) функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні по аргументах $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області, що містить значення

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

то існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння, що задовольняє початковим умовам

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (17)$$

Означення. Задачею Коші для диференціального рівняння n -го порядку розв'язаного відносно похідної, називають задачу знаходження розв'язку рівняння (16), який задовольняє початкові умови (17).

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, що залежить від n довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n і така, що задовольняє рівнянню при будь-яких їх значеннях. Співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, що неявно визначає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння n -го порядку. Будь-яка функція, що може бути отримана із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих C_1, C_2, \dots, C_n , називається частинним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку.

У деяких випадках порядок диференціального рівняння може бути знижений, що значно полегшує його інтегрування:

1) рівняння не містить шуканої функції та її похідних до деякого порядку $k - 1$ включно

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

У цьому випадку порядок диференціального рівняння може бути знижений до $n - k$ заміною $y^{(n)} = z$.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y^V - \frac{1}{x} y^{IV} = 0.$$

Зробимо заміну $y^{IV} = z$. При цьому рівняння набуває вигляду

$$z' - \frac{1}{x}z = 0.$$

Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$z = C_1 x.$$

Повернувшись до заміни, чотириразовим інтегруванням отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$y^{IV} = C_1 x,$$

$$y''' = \int C_1 x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

Перепозначивши константи, можемо записати компактніший розв'язок:

$$y = \overline{C}_1 x^5 + \overline{C}_2 x^3 + \overline{C}_3 x^2 + C_4 x + C_5.$$

2) рівняння не містить незалежної змінної

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

У цьому випадку порядок рівняння можна знизити на одиницю, взявши за нову невідому змінну y , а за нову невідому функцію $y' = p(y)$. Тоді

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' p,$$

$$y''' = p'' p^2 + (p')^2 p$$

і аналогічно для похідних вищих порядків.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y \cdot y'' - (y')^2 = 0.$$

Це рівняння не містить незалежної змінної. Тому, замінивши $y' = p(y)$ і врахувавши, що $y'' = p'p$, будемо мати:

$$yp'p - p^2 = 0.$$

Вважаючи, що $p(y) \neq 0$, розв'яжемо його, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$yp' - p = 0,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

$$p(y) = C_1 y.$$

Повернувшись до заміни, отримаємо рівняння, подібне до попереднього, розв'язавши яке, матимемо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y' = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2,$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Втрачений можливий розв'язок при $p = y' = 0$, тобто $y = \text{const}$, входить у загальний при $C_1 = 0$.

1.11. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку

Означення. Диференціальне рівняння n -го порядку називається лінійним, якщо воно є рівнянням першого степеня відносно функції y та її похідних $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, тобто має вигляд

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

де a_0, a_1, \dots, a_n і $f(x)$ – задані функції від x або сталі, причому $a_0 \neq 0$ для всіх значень x з тої області, у якій ми розглядаємо рівняння.

Припустимо, що функції a_0, a_1, \dots, a_n і $f(x)$ неперервні при всіх значеннях x , причому коефіцієнт $a_0 = 1$ (якщо цей коефіцієнт не дорівнює 1, то завжди можемо всі члени рівняння розділити на нього):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Означення. Якщо в лінійному диференціальному рівнянні коефіцієнти a_i є сталими числами, то це рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Означення. Якщо в лінійному рівнянні $f(x) \equiv 0$, то воно називається лінійним однорідним рівнянням, якщо $f(x) \neq 0$, то лінійним неоднорідним рівнянням.

Лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

коротко записують у формі $L[y] = 0$.

Теорема. Якщо y_1, y_2, \dots, y_m є розв'язками рівняння $L[y] = 0$, то лінійна комбінація з довільними сталими коефіцієнтами $\sum_{i=1}^m c_i y_i$ є розв'язком цього рівняння.

Означення. Система функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називається лінійно незалежною на $[a, b]$, якщо для будь-якого $x \in [a, b]$ рівність

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Приклад. Система функцій $1, x, x^2, x^3$ є лінійно незалежною на $(-\infty, +\infty)$. Функції $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$, де k_1, k_2, \dots, k_n попарно різні, є лінійно незалежними на $(-\infty, +\infty)$.

Теорема. Якщо система функцій y_1, y_2, \dots, y_n лінійно незалежна на $[a, b]$ і кожна функція y_1, y_2, \dots, y_n є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то загальний розв'язок $y_{3.0}$ цього рівняння для $x \in [a, b]$ має вигляд

$$y_{3.0} = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x),$$

де C_i – сталі.

Зауваження. Максимальне число лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння дорівнює його порядку.

Означення. Будь-які n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку називають його фундаментальною системою розв'язків.

1.12. Лінійні однорідні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (18)$$

у якому коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n – сталі числа. Складаємо алгебраїчне рівняння, у якому похідні функції y замінюємо на відповідні степені k , саму функцію y заміняємо на 1:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (19)$$

Означення. Рівняння (19) називається характеристичним рівнянням лінійного однорідного рівняння (18).

За основною теоремою алгебри рівняння (19) має n коренів з урахуванням кратних та комплексно-спряжених. Позначимо його корені через k_1, k_2, \dots, k_n . Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння матимемо чотири випадки:

1) всі корені характеристичного рівняння (19) є дійсними і різними. Тоді загальний розв'язок рівняння (18) записують у вигляді

$$y_{3.0} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x};$$

2) серед коренів характеристичного рівняння (19) є дійсні кратні корені. Наприклад, k_1 має кратність m (решта коренів k_{m+1}, \dots, k_n дійсні і різні), тоді загальний розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$y_{3.0} = (C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x};$$

3) серед коренів характеристичного рівняння (19) є комплексно спряжені. Наприклад, якщо $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ (решта коренів k_3, \dots, k_n є дійсними і різними). Тоді загальний розв'язок рівняння (18):

$$y_{3.0} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x};$$

4) серед коренів характеристичного рівняння (19) є кратні комплексно спряжені. Наприклад, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ має кратність m (решта коренів є дійсними і не кратними), тоді загальний розв'язок рівняння (18):

$$y_{3.0} = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x] + C_{2m+1} e^{k_{2m+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' - y = 0$.

Характеристичне рівняння для заданого рівняння має дійсні різні корені:

$$k^2 - 1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

Отже, загальний розв'язок: $y_{3.0} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' + y = 0$.

Характеристичне рівняння матиме вигляд: $k^2 + 1 = 0$. Його корені є комплексно спряженими: $k_1 = i, k_2 = -i$ ($\alpha = 0, \beta = 1$). Тоді загальним розв'язком рівняння буде $y_{3.0} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y''' - y'' - y' + y = 0$.

У цьому випадку характеристичне рівняння

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$$

має корені $k_{1,2} = 1$ (корінь кратності 2) і $k_3 = -1$. Тому загальний розв'язок:

$$y_{3.0} = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-x}.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0$$

має корені $\pm 2i$, кожен кратності 2. Тому загальним розв'язком рівняння буде функція

$$y_{3.0} = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

1.13. Лінійні неоднорідні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (20)$$

у якому коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n є сталими числами.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (20) $y_{3.н}$ є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y_{3.0}$ та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{ч.н}$:

$$y_{3.н} = y_{3.0} + y_{ч.н}$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного $y_{3.0}$ визначаємо за схемою, зазначеною у п.1.12. Частинний розв'язок $y_{ч.н}$ знаходимо за виглядом правої частини $f(x)$ неоднорідного рівняння:

1) якщо $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, де $P_m(x)$ – многочлен степеня m , то $y_{ч.н}$ шукають у вигляді:

– якщо число α не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н} = e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x),$$

де $\tilde{P}_m(x)$ – многочлен того ж порядку, що і $P_m(x)$, але з невизначеними коефіцієнтами;

– якщо число α корінь характеристичного рівняння кратності r , то

$$y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x);$$

2) якщо $f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x)$, то $y_{ч.н}$ шукають у вигляді:

– якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н} = e^{\alpha x} (\tilde{P}_l(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_l(x) \sin \beta x),$$

де $l = \max\{m, k\}$;

– якщо числа $\alpha \pm i\beta$ корені характеристичного рівняння кратності r , то

$$y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x} (\tilde{P}_l(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_l(x) \sin \beta x).$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' + 2y' + 5y = \cos 3x$.

Характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

має корені $k = -1 \pm 2i$. Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_{3.0} = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Для правої частини, що фактично має вигляд $f(x) = 1 \cdot \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x$, вираз $\alpha + \beta i = 3i$, що не співпадає із коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у такій формі з невизначеними коефіцієнтами:

$$y_{ч.н} = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Підставляючи відповідні вирази у задане рівняння, одержимо

$$(-4A + 6B) \cos 3x + (-6A - 4B) \sin 3x = \cos 3x.$$

Звідси, розв'язавши систему

$$\begin{cases} -4A + 6B = 1 \\ -6A - 4B = 0 \end{cases},$$

матимемо: $A = -\frac{1}{13}, B = \frac{3}{26}.$

Отже,

$$y_{ч.н} = -\frac{1}{13} \cos 3x + \frac{3}{26} \sin 3x.$$

Тому загальний розв'язок рівняння

$$y_{3.н} = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{13} \cos 3x + \frac{3}{26} \sin 3x.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{4x}$.

Характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

має корені $k_1 = 1, k_2 = 4$. Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_{3.0} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Для правої частини $f(x) = 4x^2 e^{4x}$ $\alpha = 4$, що співпадає із коренем характеристичного рівняння кратності $r = 1$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у такій формі з невизначеними коефіцієнтами:

$$y_{ч.н} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{4x}.$$

Підставляючи відповідні вирази в задане рівняння, одержимо

$$e^{4x}(9Ax^2 + (6A + 6B)x + (2B + 3C)) = 4x^2 e^{4x}.$$

Звідси, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 9A = 4 \\ 6A + 6B = 0, \\ 2B + 3C = 0 \end{cases}$$

матимемо:

$$A = \frac{4}{9}, B = -\frac{4}{9}, C = \frac{8}{27}.$$

Отже,

$$y_{\text{ч.н}} = e^{4x} x \left(\frac{4}{9} x^2 - \frac{4}{9} x + \frac{8}{27} \right).$$

Тому загальний розв'язок рівняння

$$y_{\text{з.н}} = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + e^{4x} \left(\frac{4}{9} x^3 - \frac{4}{9} x^2 + \frac{8}{27} x \right).$$

1.14. Інтегральні рівняння

Означення. Інтегральним рівнянням називається рівняння, в яке невідома функція $y(x)$ входить під знаком інтеграла:

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x, y(x))$$

або

$$\int_{x_0}^x K(x, t) y(t) dt = f(x, y(x)).$$

У першому випадку $x \in [a, b]$, в другому – $x \in [x_0, b], t \in [x_0, x]$. Функція $K(x, t)$ називається ядром, $f(x, y)$ – вільним членом рівняння. Ядро і вільний член є відомими заданими функціями.

Задачу Коші для диференціального рівняння

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

можна замінити інтегральним рівнянням

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(t)) dt.$$

Означення. Рівнянням Фредгольма 2-го роду називається рівняння виду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x).$$

Межі інтегрування можуть бути і нескінченними. Змінні задовольняють нерівності $a \leq x, t \leq b$, ядро і вільний член мають бути неперервні або задовольняти умовам

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Означення. Рівнянням Фредгольма 1-го роду називається рівняння виду

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x).$$

Тобто в ньому відсутня частина, що містить невідому функцію поза інтегралом.

Означення. Рівнянням Вольтерра 1-го роду називається рівняння виду

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x).$$

Рівнянням Вольтерра 2-го роду називається рівняння виду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt + f(x).$$

Рівняння Вольтерра є окремим випадком рівнянь Фредгольма, якщо ядро рівняння Фредгольма визначити так:

$$K_*(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & a \leq t \leq x, \\ 0, & x < t \leq b. \end{cases}$$

1.15. Метод послідовних наближень

Якщо в рівнянні Фредгольма числовий параметр λ задовольняє умову

$$|\lambda||b-a|\max_{a\leq x,t\leq b}|K(x,t)|<1, \quad (21)$$

то рівняння має єдиний розв'язок.

В цьому випадку він може бути знайдений методом послідовних наближень. Обравши довільним чином нульове наближення $y_0(x)$, можна побудувати послідовність функцій $y_n(x)$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)y_0(t)dt + f(x), \\ y_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)y_1(t)dt + f(x), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt + f(x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ця послідовність збігається до точного розв'язку $y(x)$, тобто $\lim_{n\rightarrow\infty} y_n(x) = y(x)$. Як правило, в якості нульового наближення $y_0(x)$ беруть $f(x)$.

Приклад. Розв'яжемо методом послідовних наближень рівняння

$$y(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)dt.$$

В цьому рівнянні $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(x,t) = 1$, $a = 0, b = 1$. Тому умова (21) виконується і рівняння матиме єдиний розв'язок. В якості нульового наближення візьмемо $y_0 = \sin \pi x$ і побудуємо наступні наближення:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_0(t)dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}, \\ y_2(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_1(t)dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$y_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi},$$

... ..

$$y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

Тоді розв'язок

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

На відміну від рівнянь Фредгольма, рівняння Вольтерра завжди має єдиний розв'язок.

Приклад. Розв'яжемо рівняння Вольтерра

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

В якості нульового наближення оберемо $y_0(x) = 1$. Тоді

$$y_1(x) = \int_0^x (x-t) \cdot 1 dt = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x (x-t) \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!},$$

... ..

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

звідки

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

1.16. Метод зведення до диференціального рівняння

Якщо в інтегральному рівнянні Вольтерра ядро $K(x, t)$ і вільний член $f(x)$ мають неперервні похідні по x , то це рівняння може бути продиференційоване один або кілька разів. Це дозволяє звести розв'язок інтегрального рівняння до задачі Коші для диференціального рівняння. Похідна при цьому обчислюється за формулою:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, t)y(t)dt = K(x, x)y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t)dt.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x - t)y(t)dt.$$

Двічі продиференціюємо дане рівняння:

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - t)y(t)dt,$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x - t)y(t)dt.$$

Виключаючи з останньої рівності за допомогою початкового рівняння інтеграл, отримаємо рівняння

$$y''(x) = 0.$$

Також можна записати і початкові умови при $x = 0$: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Розв'язавши задачу Коші, отримаємо $y(x) = x$.

2. Практичні завдання

2.1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

1. $(xy - x)dx + (x^2 + 3)(y + 1)dy = 0$.
2. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$.
3. $(y^2 - 4)(x - 1)dx + (yx + y)dy = 0$.
4. $y \ln y dx + x^2 dy = 0$.
5. $(x^2 y + x^2)dx + (x^3 - 4)(y - 2)dy = 0$.
6. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$.
7. $(y^3 - 5)(x + 1)dx + (y^2 x - y^2)dy = 0$.
8. $2x\sqrt{1 - y^2}dx - (1 + x^2)dy = 0$.
9. $e^x \sin^3 y dx + (1 + e^{2x})\cos y dy = 0$.
10. $(xy + x)dx + (x^2 - 2)(y - 2)dy = 0$.
11. $x\sqrt{2 + y^2}dx - y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.
12. $y^2 \sin x dx + (2 - y)\cos^2 x dy = 0$.
13. $(y^2 + 6)(x - 2)dx + (y - yx)dy = 0$.
14. $xy^3 dx + (4 + y^2)\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.
15. $(e^y + e^y x^2)dy + 2x(3 + e^y)dx = 0$.
16. $(xy - 2x)dx - (5 - x^2)(y + 3)dy = 0$.
17. $4e^x \operatorname{tg} y dx + (e^x - 1)\cos^{-2} y dy = 0$.
18. $(e^{2x} + ye^{2x})dx - (1 + e^{2x})dy = 0$.
19. $(3 - y^2)(x - 4)dx + (yx + 2y)dy = 0$.
20. $3e^x \sin y dx - (2 - e^x)\sin^{-1} y dy = 0$.
21. $x\sqrt{1 - y^2}dx + 2y\sqrt{x^2 - 3}dy = 0$.
22. $(5 + y^2)(2 + x)dx - (yx - 3y)dy = 0$.
23. $(y^3 - xy^3)dx - (x^3 + 2yx^3)dy = 0$.
24. $(xy^2 + x)dx + (y^2 - x^2 y^2)dy = 0$.
25. $(x \ln^2 y + \ln^2 y) dx + x^2 y^{-1} dy = 0$.

2.2. Розв'язати однорідне рівняння:

1. $(x - y)dy - ydx = 0$.

2. $y' = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$.

3. $(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$.

4. $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$.

5. $y' = \frac{x + 2y}{2x + y}$.

6. $(y - x)dy + (x + y)dx = 0$.

7. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

8. $y' = \frac{x + 3y}{3x + y}$.

9. $xdy - (x + y)dx = 0$.

10. $(x + 2y)dy = (2x - y)dx$.

11. $y' = \frac{x - 2y}{2x - y}$.

12. $2xydy - (x^2 + y^2)dx = 0$.

13. $(x + 2y)dx + (y - 2x)dy = 0$.

14. $y' = \frac{2x + y}{x + 2y}$.

15. $(x + y)dx - (x - 3y)dy = 0$.

16. $(x + y)dy - ydx = 0$.

17. $y' = \frac{x + 3y}{3x - y}$.

18. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

19. $(x - y)dx - (x + y)dy = 0$.

20. $y' = \frac{2x - y}{x + y}$.

21. $(2x - y)dy - (x + 2y)dx = 0$.

22. $(x + y)dx - (x + 2y)dy = 0$.

$$23. y' = \frac{y - 3x}{y + x}.$$

$$24. (x + 3y)dx - (y - 3x)dy = 0.$$

$$25. (x + y)dy = (y - x)dx.$$

2.3. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння:

$$1. y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}.$$

$$2. y' + \frac{2}{x+1}y = \frac{1}{x}.$$

$$3. y' + \frac{1}{x}y = \ln x.$$

$$4. y' + 2xy = x.$$

$$5. y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}.$$

$$6. y' + \frac{2}{x+3}y = x.$$

$$7. y' + \frac{2}{x}y = x.$$

$$8. y' - \frac{2}{x+1}y = x^2.$$

$$9. y' - \frac{1}{x}y = x^2.$$

$$10. y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x.$$

$$11. y' + 2xy = x^2.$$

$$12. y' + \frac{1}{x}y = e^x.$$

$$13. y' + \frac{2}{x+1}y = x.$$

$$14. y' + \frac{1}{x}y = x^2.$$

$$15. y' + \frac{3}{x+2}y = (x+2)^2.$$

$$16. y' + \frac{2}{x+1}y = x^2.$$

$$17. y' + \frac{1}{x}y = \sin x.$$

$$18. y' + \frac{1}{x+4}y = x^2 + 1.$$

$$19. y' + \frac{1}{x+2}y = x.$$

$$20. y' + \frac{3}{x}y = x^2.$$

$$21. y' + \frac{1}{x+3}y = x.$$

$$22. y' - \frac{4}{x}y = x^3.$$

$$23. y' - \frac{2}{x+1}y = x + 1.$$

$$24. y' - \frac{3}{x}y = \ln x.$$

$$25. y' + 4x^3y = x^2e^{-x^4}.$$

2.4. Розв'язати рівняння Бернуллі:

$$1. y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}y^2.$$

$$2. y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3.$$

$$3. y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^2.$$

$$4. y' - \frac{2}{x}y = -x^2y^2.$$

$$5. y' + \frac{2}{x}y = -x^2 \cos x \cdot y^2.$$

$$6. y' - \frac{1}{x}y = xy^2.$$

$$7. y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x} \ln x.$$

8. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{4}{x^2}y^2.$
9. $y' + \frac{1}{x}y = x \ln x \cdot y^2.$
10. $y' - y = -xy^3 e^{-2x}.$
11. $y' + \frac{2}{x}y = x^2 y^2.$
12. $y' + \frac{1}{x}y = xy^2.$
13. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2.$
14. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^3.$
15. $y' + \frac{3}{x}y = x^3 y^2.$
16. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} y^2.$
17. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}y^3.$
18. $y' + xy = xy^3.$
19. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^3}y^2.$
20. $y' + \frac{1}{x}y = x^2 y^2.$
21. $y' + \frac{4}{x}y = 2xy^3.$
22. $y' + 2xy = xy^2.$
23. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}y^2.$
24. $y' + \frac{2}{x}y = xy^2.$
25. $y' + 3xy = 6xy^2.$

2.5. Розв'язати рівняння у повних диференціалах:

1. $(2x + 4xy^3 - 1)dx + (3y^2 + 6x^2y^2)dy = 0.$
2. $(4x^3 - 3x^2y^4 + 2)dx + (2y - 3y^2y^3)dy = 0.$
3. $(3x^2 + 6x^2y^2)dx + (4y + 4xy^3 - 3)dy = 0.$
4. $(4x^3y^3 - 5x^4 - 2) + (3x^4y^2 - 4y^3) = 0.$
5. $(1 + 4x^3y^2 - 6x^2)dx + (2x^4y + 3y^2) = 0.$
6. $(2xy^4 + 4x)dx + (4x^2y^3 + 5y^4 - 3)dy = 0.$
7. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0.$
8. $(4x^3 - 3x^2 + y)dx + (x + 3y^2 - 2y)dy = 0.$
9. $(2x + 3x^2 + 2y)dx + (2x + 4y^3 + 3y^2)dy = 0.$
10. $(3y - 2x - 3x^2)dx + (3x - 8y^3 + 6y^2)dy = 0.$
11. $(4x^3 - 9x^2 - 2y)dx + (4y^3 - 2x - 2y)dy = 0.$
12. $(9x^2 - 4x - 3y)dx + (2y - 3x - 3y^2)dy = 0.$
13. $(3x^2 - 6x + 4y)dx + (4x + 2y + 2y)dy = 0.$
14. $(5x^4 + 4x - 6y)dx + (4y - 6x - 4y^3)dy = 0.$
15. $(6x^2 + 4x - y)dx + (9y^2 - x + 8y) = 0.$
16. $(4x - 9x^2 + 3y)dx + (4y + 3x + 6y^2)dy = 0.$
17. $(8x - 6x^2 + 5y)dx + (2y + 5x + 3y^2)dy = 0.$
18. $(3x^2 + 2xy - 4x)dx + (x^2 + 4y)dy = 0.$
19. $(3x^2y + y^2 + 2x)dx + (x^3 + 2xy + 2y)dy = 0.$
20. $(2x^2y - y + 4x)dx + (4xy - x + 6y)dy = 0.$
21. $(2xy^2 + 4y + 3x^2)dx + (2x^2y + 4x - 8y)dy = 0.$
22. $(4x + 3x^2y + 2y)dx + (2x + x^3 - 4y)dy = 0.$
23. $(5x^4 + 2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - 4y^3)dy = 0.$
24. $(2xy + y^2 - 4x)dx + (x^2 + 2xy + 8y^3)dy = 0.$
25. $(4x + 6x^2 - 5y^2)dx + (2y - 10xy + 3)dy = 0.$

2.6. Знайти інтегрувальний множник і розв'язати рівняння:

1. $(2x + y)dx - xdy = 0$.

2. $(y^2 - y)dx + xdy = 0$.

3. $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.

4. $(2y - 6x)dx + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy^2$.

5. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.

6. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

7. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

8. $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy$.

9. $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$.

10. $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$.

11. $(y^2 - 2x - 2)dx + 2ydy = 0$.

12. $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy$.

13. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.

14. $ydx + x(\ln x - y^3)dy = 0$.

15. $(3x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

16. $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy$.

17. $(2xy^2 - 4y)dx + (3x^2y - 8x)dy = 0$.

18. $4xydx + (y^3 + 4x^2)dy = 0$.

19. $(x^2 + y^3)dx + (x^2 - 3xy^2)dy = 0$.

20. $(3xy + 6y^2)dx + (2x^2 + 9xy)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy$.

21. $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$.

22. $(3x + 2y^2)dx + 2xydy = 0$.

23. $2xy^3dx + (3x^2y^2 + x^2y^3 + 1)dy = 0$.

24. $(4y - 10x)dx + \left(4x - \frac{6x^2}{y}\right)dy = 0, \quad \mu = \mu(\omega), \quad \omega = xy$.

25. $(2e^x + y^3)dx + 3y^2dy = 0$.

2.7. Розв'язати рівняння Лагранжа і Клеро:

1. $y = xy' + \operatorname{arctg} y'$.

2. $y = x(y')^2 + y'$.

3. $y = xy' + \ln y'$.

4. $y = x \frac{1}{y'} + y'$.

5. $y = xy' + (y')^2$.

6. $y = x \frac{1}{(y')^2} + y'$.

7. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

8. $y = x(y')^3 + (y')^2$.

9. $y = xy' + \sin y'$.

10. $y = x(y')^2 + (y')^2$.

11. $y = xy' + \sqrt{y'}$.

12. $y = x(y')^2 + 2(y')^3$.

13. $y = xy' + (y')^3$.

14. $y = x \frac{1}{y'} + (y')^2$.

15. $y = xy' + \cos y'$.

16. $y = x(y')^2 + (y')^3$.

17. $y = xy' + \arccos y'$.

18. $y = x(y')^2 + (y')^4$.

19. $y = xy' + \sqrt{1 + y'}$.

20. $y = x(y')^3 + 2(y')^2$.

21. $y = xy' + \operatorname{arctg} y'$.

22. $y = x(y')^3 + (y')^4$.

23. $y = xy' + e^{y'}$.

24. $y = x(y')^2 + 3y'$.

25. $y = xy' + \arcsin y'$.

2.8. Розв'язати рівняння, що допускають пониження порядку:

$$1. y'' = \frac{y'}{x-3}.$$

$$2. y'' = (y')^2.$$

$$3. y'' = \frac{(y')^2}{3y}.$$

$$4. y'' = \frac{1}{y'}.$$

$$5. y'' - (y')^2 = 1.$$

$$6. y'' = \frac{y'}{1+x}.$$

$$7. y'' = \frac{1}{(y')^2}.$$

$$8. y'' = y'.$$

$$9. y \cdot y'' - (y')^2 = 0.$$

$$10. y'' = \frac{(y')^2}{y+1}.$$

$$11. y'' = \frac{1}{\sqrt{y'}}.$$

$$12. 2y \cdot y'' - (y')^2 = 0.$$

$$13. y'' = \frac{(y')^2}{y+2}.$$

$$14. y'' = y' \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$15. y'' = \frac{(y')^2}{2(y+1)}.$$

$$16. y'' = \frac{3y'}{x-2}.$$

$$17. y'' = \frac{(y')^2}{y-4}.$$

$$18. y'' = \frac{y'}{x+2}.$$

$$19. y'' \cdot x - y' = 0.$$

$$20. y'' = \frac{2y'}{1+x}.$$

$$21. y'' = 2y' + x.$$

$$21. y'' = \frac{4y'}{x+3}.$$

$$23. y'' = y' \cdot \operatorname{ctgx}.$$

$$24. y'' = \frac{(y')^2}{y+3}.$$

$$25. y''(2x-1) = 3y'.$$

2.9. Розв'язати лінійні однорідні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами:

$$1. y''' - 6y'' + 8y' = 0.$$

$$2. y''' - 12y'' + 48y' - 64y = 0.$$

$$3. y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0.$$

$$4. y''' - 7y'' + 10y' = 0.$$

$$5. y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$$

$$6. y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$$

$$7. y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$8. y''' - 2y'' + 5y' = 0.$$

$$9. y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0.$$

$$10. y''' - 8y'' + 16y' = 0.$$

$$11. y''' - 4y'' + 13y' = 0.$$

$$12. y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$$

$$13. y''' - 4y'' - y' + 4y = 0.$$

$$14. y''' - 2y'' + 10y' = 0.$$

$$15. y^{(4)} - y''' - 6y'' = 0.$$

$$16. y''' - 6y'' + 9y' = 0.$$

$$17. y''' + y'' - 12y' = 0.$$

$$18. y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

19. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
20. $y''' - 4y'' + 4y' = 0$.
21. $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = 0$.
22. $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$.
23. $y''' - 6y'' + 8y' = 0$.
24. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.
25. $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

2.10. Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами:

1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = x^2$.
2. $y'' + 3y' + 2y = 2\cos x - \sin x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x$.
4. $y''' - y'' = x^2$.
5. $y''' - 5y'' + 4y' = e^{3x}$.
6. $y''' + y'' - 2y' = \sin x$.
7. $y'' - y' - 2y = xe^x$.
8. $y'' + 3y' = x\cos x$.
9. $y''' + y'' - 2y' = x^2 + 2x + 1$.
10. $y'' - 2y' = e^{2x}$.
11. $y'' + y' - 2y = \sin x + \cos x$.
12. $y'' - y' = x^2 + x + 1$.
13. $y'' + 4y = (2x + 1)e^{3x}$.
14. $y'' - 3y' + 2y = \sin 2x$.
15. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x^2 - 3x$.
16. $y'' - 4y' = e^{4x}$.
17. $y'' + 9y = \sin 3x$.
18. $y''' - 3y'' - y' + 3y = x^2 - 2$.
19. $y'' + 4y = xe^x$.

$$20. y'' + 4y = \cos 2x.$$

$$21. y''' + 2y'' = 1 - x^2.$$

$$22. y'' - 4y = e^{2x}.$$

$$23. y'' + y' - 2y = 3\sin x - \cos x.$$

$$24. y'' + 2y' = x^2 - 3x + 2.$$

$$25. y'' - 4y' + 4 = xe^x.$$

2.11. Розв'язати інтегральне рівняння методом послідовних наближень:

$$1. y(x) = 1 + \int_0^1 xy(t)dt.$$

$$2. y(x) = e^x + \int_0^1 e^{x-t}y(t)dt.$$

$$3. y(x) = 1 + \int_0^1 x\left(1 - \frac{3}{2}t\right)y(t)dt.$$

$$4. y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t}y(t)dt.$$

$$5. y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

$$6. y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt.$$

$$7. y(x) = 3 \int_0^x e^{x-t}y(t)dt + e^x.$$

$$8. y(x) + \int_0^x y(t)dt = x + \frac{x^2}{2}.$$

$$9. y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt = 1.$$

$$10. y(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt.$$

$$11. y(x) = \int_0^1 x e^{x-t} y(t) dt + e^x.$$

$$12. y(x) = \int_0^1 x t y(t) dt + \sqrt{1-x^2}.$$

$$13. y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin t \cdot y(t) dt + \sin x.$$

$$14. y(x) = \int_0^e \frac{\ln t}{x} y(t) dt + \ln x.$$

$$15. y(x) = \int_0^1 \sqrt{x t} y(t) dt + x.$$

$$16. y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}} y(t) dt + x^{3/2}.$$

$$17. y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin x \cdot y(t) dt + \cos x.$$

$$18. y(x) = \int_0^x y(t) dt + x^2.$$

$$19. y(x) = \int_0^x y(t) dt + \frac{x^2}{2}.$$

$$20. y(x) = \int_0^x (x-t) y(t) dt + x.$$

$$21. y(x) = 1 - \int_0^x t g t \cdot y(t) dt.$$

$$22. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{y(t)}{x+t} dt.$$

$$23. y(x) = 2 \int_0^x ty(t) dt + x^2.$$

$$24. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{xy(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

$$25. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{ty(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

2.12. Розв'язати інтегральне рівняння методом зведення до диференціального рівняння:

$$1. y(x) = 6 - 14x - \int_0^x (3x - 3t - 4)y(t) dt.$$

$$2. y(x) = 2x - \int_0^x (9x - 9t - 6)y(t) dt.$$

$$3. y(x) = \frac{x^2}{2} + 1 + \int_0^x y(t) dt.$$

$$4. y(x) = 2 + 3 \int_{-1}^x \frac{y(t)}{t} dt.$$

$$5. y(x) = 2 \int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} y(t) dt + 1.$$

$$6. y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

$$7. y(x) + \int_0^x (x-t)y(t) dt = 1.$$

$$8. y(x) = \int_0^x (1+x-t)y(t) dt + x^2.$$

9. $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$
10. $y(x) = 2\operatorname{sh}x + 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$
11. $y(x) = \int_0^x \frac{t}{t+1}y(t)dt + e^x.$
12. $y(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt + 2\operatorname{sh}x.$
13. $y(x) = 4 \int_0^x (t-x)y(t)dt + 3\cos x.$
14. $y(x) = \int_1^x \frac{4t-5x}{t^2}y(t)dt + \ln x.$
15. $y(x) = \int_0^x (3(x-t) - (x-t)^2)y(t)dt + e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1.$
16. $y(x) = \int_1^x \frac{4x-3t}{t^2}y(t)dt + 4x \ln x - 1.$
17. $y(x) = \int_1^x \frac{x}{t^2}y(t)dt + x^2.$
18. $y(x) = \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt + x.$
19. $y(x) = 6 \int_0^x \cos 5(x-t)y(t)dt - 4e^{5x}.$
20. $y(x) + 3 \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = 2\operatorname{sh}x.$
21. $y(x) = 3 \int_0^x \operatorname{ch} 2(x-t)y(t)dt + 5e^{-2x}.$
22. $y(x) + 5 \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt + 3\cos x = 0.$

$$23. y(x) = \int_0^x (2e^{x-t} + e^{3(x-t)})y(t)dt + 20x - 4.$$

$$24. y(x) = \int_0^x (2e^{2(x-t)} - e^{3(x-t)})y(t)dt + 5.$$

$$25. y(x) = \int_0^x \frac{t+2}{(x+2)^2} y(t)dt + 2x.$$

Список літератури

1. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навчальний посібник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 360 с.
2. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь: навчальний посібник. Київ: Техніка, 1997. 288 с.
3. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2004. 408 с.
4. Ляшко І. І. Диференціальні рівняння: підручник / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. Київ: Вища школа, 1981. 504 с.

Додаток. Основні формули та означення

Диференціальні рівняння

| Основні поняття | Означення |
|--|--|
| Диференціальне рівняння n-го порядку | Рівняння, що пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. |
| Порядок диференціального рівняння | Найвищий порядок похідної, що входить до диференціального рівняння. |
| Загальний розв'язок диференціального рівняння | Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка перетворює рівняння $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ у тотожність. |
| Частинний розв'язок диференціального рівняння | Розв'язок $y = y(x)$, який можна одержати із загального розв'язку за певних значень довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n . |
| Особливий розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння | Розв'язок $y = y(x)$, який не можна одержати із загального розв'язку за жодних значень довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n . |
| Диференціальне рівняння першого порядку | Рівняння виду $F(x, y, y') = 0$. |
| Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної | Рівняння виду $y' = f(x, y)$ або у диференціальній формі $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. |
| Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку | Задача знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. |

Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх розв'язування

| Диференціальне рівняння | Метод розв'язування |
|--|--|
| Рівняння з відокремленими змінними: $M(x)dx + N(y)dy = 0$ | $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$ |
| Рівняння з відокремлюваними змінними: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dxdy = 0$ | $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$ |
| Однорідні рівняння: $y' = f(x, y),$ де $f(tx, ty) = f(x, y), \forall t \neq 0.$ | Заміною $y = z \cdot x$ та $y = z' \cdot x + z,$ де $z = z(x)$, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. |
| Лінійне однорідне рівняння: $y' + p(x)y = 0$ | $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ |
| Лінійне неоднорідне рівняння: $y' + p(x)y = q(x)$ | 1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) Розв'язок шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$ |
| | 2. Метод Бернуллі Розв'язок шукаємо у вигляді $u = u(x) \cdot v(x)$, де функції $u(x)$ та $v(x)$ визначаються із системи $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$ |
| Рівняння Бернуллі: $y' + p(x)y = q(x)y^n,$ ($n \neq 0, n \neq 1$) | 1. Метод зведення до лінійного Підстановкою $z = y^{1-n}, z' = \frac{1-n}{y^n} y'$ рівняння зводиться до лінійного. |
| | 2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) Розв'язок шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$ |

| | |
|---|--|
| | <p>3. Метод Бернуллі</p> <p>Розв'язок шукаємо у вигляді $u = u(x) \cdot v(x)$, де функції $u(x)$ та $v(x)$ визначаються із системи</p> $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u' = q(x)u^n v^{n-1}. \end{cases}$ |
| <p>Рівняння в повних диференціалах:</p> $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \text{ де}$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$ $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ | <p>Загальний інтеграл $u(x, y) = C$</p> <p>Для знаходження $u(x, y)$:</p> $\begin{cases} u'_x = M(x, y) & (1) \\ u'_y = N(x, y) & (2) \end{cases}$ <p>1. Інтегруємо за x рівняння (1): $u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$ (3).</p> <p>2. Підставляємо (3) у формулу (2). Для $\varphi(y)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними.</p> <p>3. Знайдене $\varphi(y)$ підставляємо у формулу (2).</p> |
| <p>Рівняння, що перетворюються в рівняння у повних диференціалах за допомогою інтегруючого множника</p> <p>$\mu = \mu(x, y)$:</p> $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$ $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0,$ $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ | <p>1. Якщо</p> $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$ <p>(не залежить від y), то</p> $\mu = e^{\int \varphi(x)dx}.$ <p>2. Якщо</p> $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \varphi(y)$ <p>(не залежить від x), то</p> $\mu = e^{\int \varphi(y)dy}.$ <p>3. Якщо $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$, то μ знаходимо з рівняння</p> $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$ |

| | |
|--|--|
| Рівняння Лагранжа: $y = x\phi(y') + \varphi(y')$ | Диференціюючи за x та вважаючи $y' = p$, отримаємо лінійне рівняння відносно x як функції від p . |
| Рівняння Клеро: $y = xy' + \varphi(y')$ | Окремий випадок рівняння Лагранжа. |

Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають пониження порядку

| Диференціальне рівняння | Метод розв'язування |
|--|---|
| Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ | n -кратне інтегрування |
| Рівняння, яке не містить явно шуканої функції $y: F(x, y', y'') = 0$ | Заміна $y' = p, y'' = p' = \frac{dp}{dx}$ |
| Рівняння, яке не містить явно незалежної змінної x: $F(y, y', y'') = 0$ | Заміна $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$ |

Лінійне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

| Диференціальне рівняння | Метод розв'язування |
|--|--|
| Лінійне однорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$. Характеристичне рівняння: $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$, де k_1, k_2, \dots, k_n – корені характеристичного рівняння. | Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y_{3.0}$ визначається в залежності від коренів характеристичного рівняння: 1. Усі корені характеристичного рівняння k_1, k_2, \dots, k_n є дійсними і різними. $y_{3.0} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$. 2. Серед коренів характеристичного рівняння є дійсні кратні корені. Наприклад, k_1 має кратність m (решта коренів, k_{m+1}, \dots, k_n , є дійсними різними), тоді $y_{3.0} = (C_1 + C_2 x + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + \dots + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}$. |

| | |
|--|---|
| | <p>3. Серед коренів є комплексно спряжені. Наприклад, якщо, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (решта коренів, k_3, \dots, k_n, є дійсними і різними), тоді</p> $y_{3.0} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \dots + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$ <p>4. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні комплексно спряжені корені. Наприклад, якщо, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ має кратність m (решта коренів, k_{2m+1}, \dots, k_n, є дійсними і різними), тоді</p> $y_{3.0} = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x] + C_{2m+1} e^{k_{2m+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$ |
| <p>Лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:</p> $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ | <p>Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{3.н}$ є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y_{3.0}$ та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{ч.н}$:</p> $y_{3.н} = y_{3.0} + y_{ч.н}.$ |

Лінійні неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною

| Права частина $f(x)$ | Корені характеристичного рівняння | Вигляд частинного розв'язку $y_{ч.н}$ |
|-----------------------|---|---------------------------------------|
| $P_m(x)$ | Число 0 не є коренем характеристичного рівняння | $\tilde{P}_m(x)$ |
| | Число 0 – корінь характеристичного рівняння кратності r | $x^r \tilde{P}_m(x)$ |
| $e^{\alpha x} P_m(x)$ | Число α не є | $e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$ |

| | | |
|--|--|--|
| | коренем характеристичного рівняння | |
| | Число α – корінь характеристичного рівняння кратності r | $x^r e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$ |
| $A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x$ | Числа $\pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння | $\tilde{A}_1 \cos \beta x + \tilde{A}_2 \sin \beta x$ |
| | Числа $\pm i\beta$ – корені характеристичного рівняння кратності r | $x^r (\tilde{A}_1 \cos \beta x + \tilde{A}_2 \sin \beta x)$ |
| $e^{\alpha x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x)$ | Числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння | $e^{\alpha x} (\tilde{A}_1 \cos \beta x + \tilde{A}_2 \sin \beta x)$ |
| | Числа $\alpha \pm i\beta$ – корені характеристичного рівняння кратності r | $x^r e^{\alpha x} (\tilde{A}_1 \cos \beta x + \tilde{A}_2 \sin \beta x)$ |

Інтегральні рівняння

| Основні поняття | Означення |
|---|---|
| Інтегральне рівняння | Інтегральним називається рівняння, у якому невідома функція $y(x)$ міститься під знаком інтеграла. |
| Інтегральне рівняння першого порядку | $\int_a^b K(x, t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad x \in [a, b] \quad \text{або}$ $\int_{x_0}^x K(x, t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad x \in [x_0, b], t \in [x_0, x]$ <p>де $K(x, t, y)$ – ядро, та $F(x, y)$ – права частина, $y(x)$ – шукана функція.</p> |

| | |
|--|---|
| Інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду | $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$ |
| Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду | $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt + f(x)$ |
| Інтегральне рівняння Вольтерра 1-го роду | $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt + f(x)$ |
| Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду | $y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)y(t) dt + f(x)$ |

Методи розв'язання інтегральних рівнянь

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду

Обравши довільним чином нульове наближення $y_0(x)$, можна побудувати послідовність функцій $y_n(x)$:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t)y_0(t) dt + f(x), \\
 y_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t)y_1(t) dt + f(x), \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_n(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t)y_{n-1}(t) dt + f(x), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Ця послідовність збігається до розв'язку $y(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$.

Рівняння Фредгольма 2-го роду матиме єдиний розв'язок за умови:

$$|\lambda| |b - a| \max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t)| < 1.$$

**Метод послідовних наближень
для інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду**

Рівняння Вольтерра завжди має єдиний розв'язок. Послідовність функцій $y_n(x)$, побудована за принципом:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \lambda \int_a^x K(x, t) y_0(t) dt + f(x), \\y_2(x) &= \lambda \int_a^x K(x, t) y_1(t) dt + f(x), \\&\dots \dots \dots \\y_n(x) &= \lambda \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt + f(x), \\&\dots \dots \dots\end{aligned}$$

завжди збігається до єдиного розв'язку інтегрального рівняння при $n \rightarrow \infty$.

Метод зведення до диференціального рівняння

Якщо в інтегральному рівнянні Вольтерра ядро $K(x, t)$ і вільний член $f(x)$ мають неперервні похідні по змінній x , то це рівняння може бути продиференційоване один або декілька разів. Це дозволяє звести інтегральне рівняння до задачі Коші для диференціального рівняння.

Похідна від інтеграла при цьому:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, t) y(t) dt = K(x, x) y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt.$$

Підписано до друку
Друк цифровий.
Обл.-вид. арк.

Формат 60×84/16.
Ум. друк. арк. 2,33
Наклад 30 пр.

Папір друкарський.
Ум. фарбовідб.
Зам. №

ПП «Ліра ЛТД», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
Серія ДК № 6042 від 26.02.2018 р